

交通渋滞と常微分方程式モデル

友枝明保

◎武蔵野大学環境学部/JST CREST

1. はじめに

日本の交通渋滞による損失時間は、平成24年度のデータによると年間約50億人・時間(移動時間の約4割)[1]にもものぼるといわれており、例えば、一人あたりの時間平均賃金を2300円とすると、年間11.5兆円もの経済損失が生まれていると試算される。東日本大震災の復興に充てるための復興予算が5年で25兆円と言われていることから、交通渋滞による経済損失がいかに大きいかはわかっていただけだと思う。交通渋滞が生まれる要因や形成されるメカニズムを解明し、解消する方法を導くことは社会的にも大きなミッションとなっているのである。

しかしその一方で、交通渋滞がなぜ起こるかを調べるために、実際に街中や高速道路で渋滞を発生させるわけにもいかない。ここで絶大な力を発揮するのが、数理モデルである。車が道路を走るという運動を的確に表現する数理モデルを構築し、その仮想的な環境におけるさまざまなシミュレーションや理論解析を通じて、渋滞がなぜ生じるのか、渋滞を解消するためにはどうすればよいのか、という疑問に対する答えを導き出していくのである。

では、具体的にはどのように数理モデルを作っていけば良いのであろうか？ 一つの方法は、車一台の「動き」に注目して、その動的な振る舞いを記述するというものである。つまり、車のいる場所や速度の時間変化を数式で記述するという方法である。時間変化の表現方法は二通り考えられ、時間変数を離散的に見る場合と連続的に見る場合がある。前者の代表例はルール184セルオートマトンと呼ばれる数理モデルであり、空間変数*i*、時間変数*t*としたときに、車がいる(1)・いない(0)を表す変数 U_i^t を用

いて、次のようなMax-Plus代数による時間発展式として記述される。

$$U_i^{t+1} = U_i^t + \min(U_{i-1}^t, 1 - U_i^t) - \min(U_i^t, 1 - U_{i+1}^t). \quad (1)$$

本稿は微分方程式がテーマであるため、(1)の詳細については割愛するが、セルオートマトンは、時間変数や空間変数、さらには、従属変数も離散値で扱われることから、計算機を用いた数値シミュレーションと相性が良い、というメリットがある。セルオートマトンを用いた渋滞研究に興味のある読者は、[2, 3, 4]などを参照していただければ良いと思う。後者の例が、常微分方程式で記述される数理モデルである。微分方程式で記述する場合は、微積分をはじめとした計算体系が整っているため、セルオートマトンに比べて解析手法が豊富に存在する、というメリットがある。本稿では、車両間の相対速度の効果を組み込んだ常微分方程式モデル[5]について、そのモデリングのアイデアと数理解析から得られた知見について解説する。

2. 車の動きの数理モデル化

交通渋滞には、信号やカーブ、事故や工事など、さまざまな要因が考えられるが、ここでは、そういった環境から受ける外的要因の渋滞ではなく、高速道路でよくみられる自然渋滞、つまり、車の流れがもつ内的要因によって引き起こされる交通渋滞について考える。

高速道路の運転では、ドライバーはアクセルを踏んで加速し、ブレーキを踏んで減速を行っているだけである。このことから、速度の時間変化(=加速度)に着目した運動方程式を作っていこう。まず考えなければいけないことは、ドライバーは運転中に

加減速の判断をどうやって行っているか、という点である。ここでは、「前方車との車間距離」と、「前方車との相対速度」がドライバーの加減速に関与していると考えよう。もちろん、車間距離だけ、あるいは、相対速度だけ、という考え方で数理モデルを作っても良いし、前方車だけではなく、後方の車の影響や数台先の車まで見て判断している、ということを考えて数理モデルを構築しても構わない。これは数理モデルを構築する研究者の考え方によるので、ここでは上の二つの要因で加減速が決定されると仮定して、話を進めていくことにしよう。これらの仮定のもとで、車の動きを表す数理モデルを、次のような常微分方程式で記述することにしよう[5]。

$$\frac{d}{dt}v_j = a - b \frac{v_j}{(h_j - d)^2} \exp(-c\Delta v_j) - \gamma v_j \quad (2)$$

いきなり複雑な式が出てきた印象を持たれるかもしれないが、一つずつ見ていけば数理モデルの各項の意味を理解していただけると思う。まず、 a, b, c, d, γ は正値パラメータであり、次の章で説明するように、実験結果から見積もる。この数理モデルの一つのメリットは、測定された実験データからすべてのパラメータを決定できる、という点にある。次に、 v_j は車群の中の j 番目の車両の速度である。このことから左辺は、 j 番目の車の加速度を表していることがわかる。右辺に見られる $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$ と h_j はそれぞれ前方の車両($j+1$)と自車(j)との相対速度、および車間距離を表す。右辺第一項 a は、最大加速度と呼ばれ、速度 $v_j = 0$ のときの加速度を表す。つまり、停止した状態から動き始める際の加速度である。この項がないと、止まっている車は動き出すことができない。右辺第二項が相対速度の効果を表す項である。相対速度の効果は自車速度と車間距離に依存して変化すると考えられるので、このような形で導入する。つまり、同じ相対速度であっても、車間距離が小さく、速度の大きい方が加減速の振る舞いに大きな影響を与えると考えられるので、速度に比例し、かつ車間距離に反比例する形で導入する[6, 7]。右辺第三項 $-\gamma v_j$ は自車速度によって加速

度が下がる効果を意味する。つまり、止まっているときに比べて、走っているときの方が加速度が小さくなると考え、自車速度 v_j に依存して、加速度が小さくなるように組み込んでいる。

3. 数理モデルのパラメータ設定

数理モデル解析をするにあたり、(2)で表される数理モデルの各パラメータ a, b, c, d, γ を決定しよう。ここでは、図1に示す長円形のサーキットで行われた12台の車両を用いた走行実験を紹介する。まず、実験方法は次のとおりである。全車が一定の車間距離・速度で安定に走行している一様流の状況を確認したのち、点Aで先頭のドライバーに指示を出し、減速をしてもらう。その際に観測される、後方に伝わる減速波のデータを車載GPSを用いることで取得した。複数の車間距離(8 m, 10 m, 15 m)の一様流を設定し、減速方法では、ソフトブレーキ(時速30 km → 時速25 km)とハードブレーキ(時速30 km → 時速20 km)の二つの方法を行った。この実験によって得られたデータに基づき、相対速度と加減速の関係をプロットした図が、図2である(次ページ)。

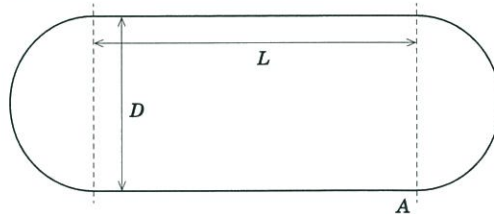
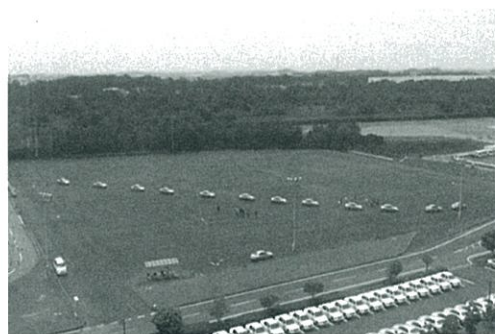


図1 実験の様子と、車両が走行するサーキットの概略図[5]。
 $L = 100$ m, $D = 50$ mとしてサーキットを設計した。

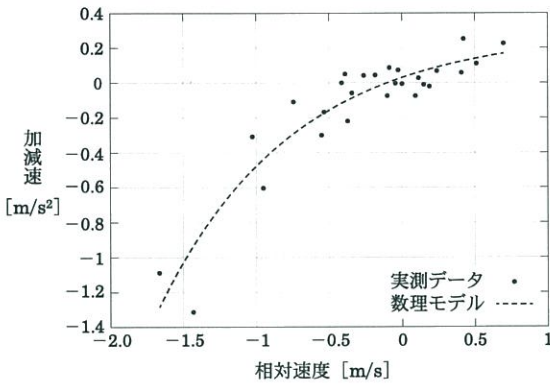


図2 相対速度と加減速の関係を表した図[5].
 プロット点は実測データであり、破線は数理モデル(1)の右辺 $a - b\bar{v} \exp(-c\Delta v) / (\bar{h} - d)^2 - \gamma\bar{v}$ に対して、パラメータフィットした曲線である。ここで、 \bar{v}, \bar{h} はそれぞれ実験データより、 $\bar{v} = 8.484$ m/s, $\bar{h} = 15.52$ m とし、フィッティングにより、各パラメータ値は $a = 0.73$, $b = 3.25$, $c = 1.08$, $d = 5.25$, $\gamma = 0.0517$ とした。

図2を見る限り、加減速は、相対速度と正の相関を示すことがわかる。相対速度が正($\Delta v > 0$)のとき、つまり、前方の車の方が速いとき、加速し、相対速度が負($\Delta v < 0$)のとき、つまり、前方の車の方が遅いとき、減速する、ということが示されている。ただ、原点付近では、相対速度が負であっても、加速している状況が見られる。これは、前方の車が少し減速しただけでは、追従する車のドライバーはブレーキを踏まないことを示している。つまり、すぐにブレーキを踏むのではなく、車間距離を詰めながら前方車の状況を窺っているのである。さらに、図2は、加減速の非対称性も表している。これは、ドライバーが前方との衝突を避けるために、アクセルよりブレーキ操作を強く行う傾向にあり、減速が加速に比べて強い、ということである。図2の近似曲線を見ていただければわかるように、数理モデルで導入した指数関数が相対速度と加減速の関係をよく表していることもわかっていただけたと思う。

4. 数理モデル解析

1章で述べたように、数理モデル解析の目的の一つは、なぜ渋滞が起こるか、という疑問に答えるこ

とであり、特に高速道路で見られる自然渋滞のメカニズムを解明することが次の目標である。ここでは、(2)の数理モデル解析から得られた渋滞形成のメカニズムについて解説する。

● 4.1 線形安定性解析

自然渋滞の形成メカニズムを解明するために、実験と同様、数理モデル解析においても、全車両が等速・等間隔で走行している一様流の状況を考える。全車が等速ということから、加速度と相対速度がゼロ、すなわち、(2)の左辺 $\frac{d}{dt}v_j = 0$ 、および $\Delta v_j = 0$ とし、次の関係

$$v_H = \frac{a(h_H - d)^2}{b + \gamma(h_H - d)^2} \quad (3)$$

が得られる。この v_H は一様流速度と呼ばれ、図3のような関数形となる。極限 $h_H \rightarrow \infty$ において、一様流速度は a/γ に収束する。(2)には、 $x_j(t)$ を時刻 t における j 番目の車の位置とすると、一様流解と呼ばれる自明な解 $x_j(t) = v_H t + h_{Hj}$ が存在し、この一様流解の線形安定性解析を行おう。つまり、一様流解に対して、ちょっとだけズレが入った場合の解の振る舞いについて議論する。このズレが時間とともに減衰していけば一様流解は安定であるが、時間とともに増幅していけば一様流解は不安定となり、その状態を保てなくなることがわかる。

一様流にちょっとしたズレ $a_j(t)$ が入った状況を次のように与える。

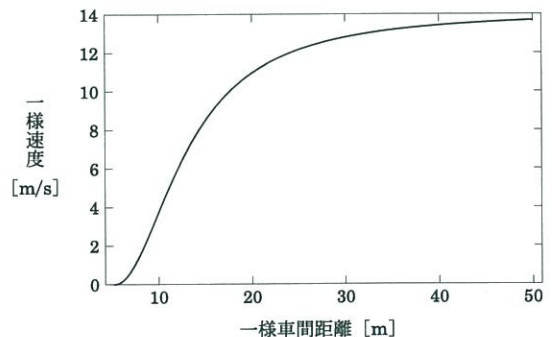


図3 一様流で走行しているときの車間距離と速度の関係[5].
 パラメータは図2と同じものである。

$$\omega_{\pm}(k) = \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{b}{(h_H-d)^2} + \frac{bcv_H}{(h_H-d)^2} (1-e^{ik}) + \gamma \right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{(h_H-d)^2} + \frac{bcv_H}{(h_H-d)^2} (1-e^{ik}) + \gamma \right)^2 - \frac{8bv_H}{(h_H-d)^3} (1-e^{ik})} \right] \quad (5)$$

$$v_j(t) = v_H + a_j(t), \quad (4)$$

(2)を線形化した方程式に、(4)を代入し、ちょっとしたズレは波数 k ($k = 0, 1, 2, \dots$) の波の重ね合わせで表現できることから、 $a_j = \exp(ikj + \omega t)$ (i は虚数単位) とおくことで、(5)式のような分散関係式が得られる。この式から、 ω_{-} の実部は常に負であることが確かめられる。つまり、 $\omega_{-}(k)$ はどのような k に対しても常に安定であることがわかる。一方、図4に示すように、 ω_{+} の実部は正になることもあり、そのパラメータ領域では一様流が不安定となることがわかる。実際、 ω_{+} を長波長 ($k \rightarrow 0$) で展開し、安定性に寄与する $\partial^2 \omega_{+}(0) / \partial k^2$ の項を考えると、一様流が不安定となる条件

$$4bv_H^3 - 2abc(h_H-d)v_H^2 - a^2(h_H-d)^3 > 0, \quad (5)$$

が導かれ、各パラメータが変化したときの安定性が議論できる。例えば、パラメータが図2の値のとき、車間距離が 7.91 m から 28.91 m の間で、一様流が不安定となることがわかる。このことから、等間

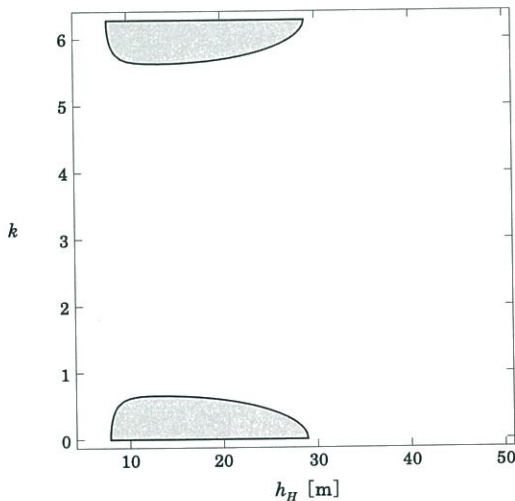


図4 ω_{+} の実部が正となる不安定領域(グレー領域)を描いた図。

隔・等速で走っている状況であっても、一様流が不安定となる車間距離で走行していると、ちょっとした速度のズレが増幅していき、一様流状態を保つことができず、最終的に渋滞が形成されてしまうのである。

◎— 4.2 数値シミュレーション

安定性解析で得られたメカニズムをシミュレーションでも確認してみよう。(2)式で表された微分方程式は、一台の車の振る舞いを記述していたので、車の台数分、方程式を連立させることで、車群の数値シミュレーションを行う。

シミュレーション条件として、境界条件には、周期境界条件を課す。すると、サーキットの長さと同数の車の台数を与えると一様な車間距離が得られ、その車間距離から一様流速度が求まる。これらの一様流解を基本初期条件とし、ある一台だけに速度の摂動を与えた初期条件でシミュレーションを行った結果が、図5である。時間経過とともに、初期擾乱が成長し、

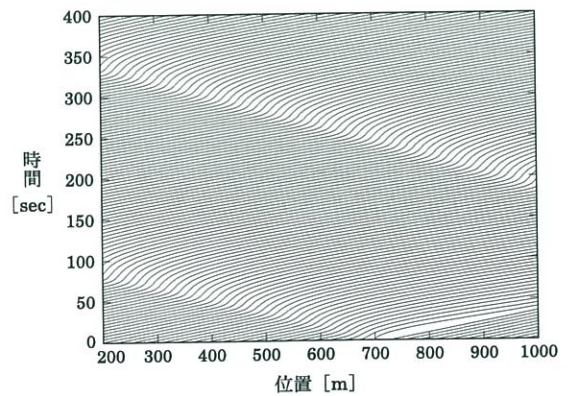


図5 各車の軌跡を表示した時空図[5]。横軸は空間内の場所、縦軸が時間を表す。車両台数は100台で、道路の長さは1400 mとし、他のパラメータは図2と同じものである。

車両のクラスターが形成されていることがわかる。特に、そのクラスターは進行方向に対して逆向きに移動していることもわかる。さらに、ある特定の時刻における空間全体での各車両の速度分布を表した図が、図6である。この図を見ると、初期状態では等速であった流れが、中間状態を経て、最終的には、速度の速い領域と速度の遅い領域に分離していることがわかる。安定性解析でも示されたように、ちょっとした速度のズレが増幅し、最終的に渋滞を作り出していることがわかっていただけだと思う。

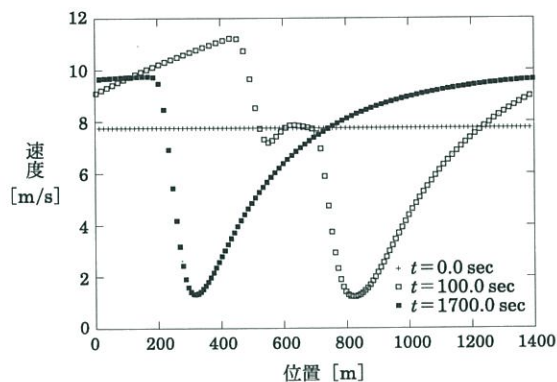


図6 各時間 $t = 0.0, 100.0, 1700.0$ sec における車両速度の空間内の分布図[5].

6. さいごに

数理モデル解析で示したように、自然渋滞は一樣流に微小摂動が与えられ不安定化した結果として形成されている渋滞であることがわかっていただけだと思う。この渋滞形成メカニズムは、車両の流れがもつ内的要因に起因するため、高速道路のある地点での観察や測定から明らかにすることは困難で、数理モデル研究が渋滞現象の解明に大きく貢献した研究成果と言える。本稿では、社本大輔氏、西遼佑氏、西成活裕氏との共同研究である参考文献[5]に基づいて解説したが、自然渋滞の形成メカニズムの解明においては、最適速度(Optimal Velocity, OV)モデルと呼ばれる数理モデルの数理解析による貢献が大きく、車の流れに見られるさまざまな特徴が数理モ

デル研究によって明らかにされている。OVモデルの数理解析に興味のある読者は[8,9]あたりをご覧ください。いただければ良いと思う。

本稿では、数理モデルを用いて、渋滞形成のメカニズムについて解説し、そのカラクリを理解していただけたと思う。メカニズムが明らかになったので、次のステップはどうやって渋滞を解消するかである。渋滞形成のメカニズムをふまえ、最近では、渋滞を解消するための運転術も提案している[10]。自然渋滞を解消するためには、一樣流を安定化すればよく、これは、渋滞のタネとなる速度のズレが時間とともに減衰するようにもっていけばよいのである。安定性の議論から、ある臨界車間距離以下になると、一樣流が不安定化し、渋滞を生むことが示されているので、臨界車間距離以上を保つような運転を行えばよいことがわかる。具体的には、高速道路の場合、車間距離を40mに保って走行すればよく、この渋滞吸収運転に関する社会実験や実験結果について興味のある読者は、JAFのホームページ等をご覧ください[11].

参考文献

- [1] 国土交通省第15回道路分科会配布資料：
<http://www.mlit.go.jp/common/001046643.pdf>
- [2] 『差分と超離散』 広田良吾・高橋大輔著，共立出版，(2003).
- [3] 『現象数理学入門』(第3章 社会の現象数理 渋滞学入門，友枝明保・西成活裕著)，三村昌泰(編)，東京大学出版会，(2013).
- [4] A. Schadschneider, D. Chowdhury, and K. Nishinari, "Stochastic Transport in Complex Systems from Molecules to Vehicles" (Elsevier, 2010).
- [5] D. Shamoto, A. Tomoeda, R. Nishi and K. Nishinari, *Car-following model with relative-velocity effect and its experimental verification*, Phys. Rev. E, **83**, 046105 (2011).
- [6] D. C. Gazis, R. Herman, and R. B. Potts, *Car-Following Theory of Steady-State Traffic Flow*, Oper. Res. **7**, 499 (1959).
- [7] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery, *Nonlinear Follow-The-Leader Models of Traffic*

- Flow, Oper. Res.* **9**, 545 (1961).
- [8] 岩波講座・計算科学6『計算と社会』(第5章 交通流, 杉山雄規著), 岩波書店, (2012).
- [9] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation*, *Phys. Rev. E*, **51**, 1035 (1995).
- [10] R. Nishi, A. Tomoeda, K. Shimura and K. Nishinari, *Theory of jam-absorption driving*, *Transportation Research Part B*, **50**, 116, (2013).
- [11] JAF Channel「社会実験——渋滞吸収理論を実践する」

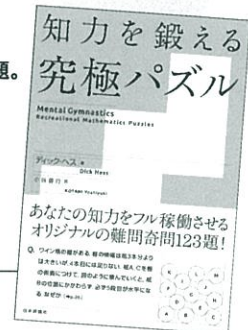
[ともえだ あきやす]

知力を鍛える 究極パズル

ディック・ヘス 著

小谷善行 訳

他書では見かけない
オリジナルの難問奇問で、
あなたに挑みます。
あなたの知力を
フル稼働させる、
究極の数理パズル123題。



■目次

- 第1章 ちょっとしたパズル
- 第2章 数のパズル
- 第3章 幾何パズル
- 第4章 論理のパズル
- 第5章 分析パズル
- 第6章 確率のパズル
- 第7章 算数さいころパズル
- 第8章 ポリオミノを控えめに覆う
- 第9章 数字で遊ぶ

■本体1800円＋税 ■四六判 ■ISBN978-4-535-78726-1

 **日本評論社**
<http://www.nippony.co.jp/>